



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Wykład 8

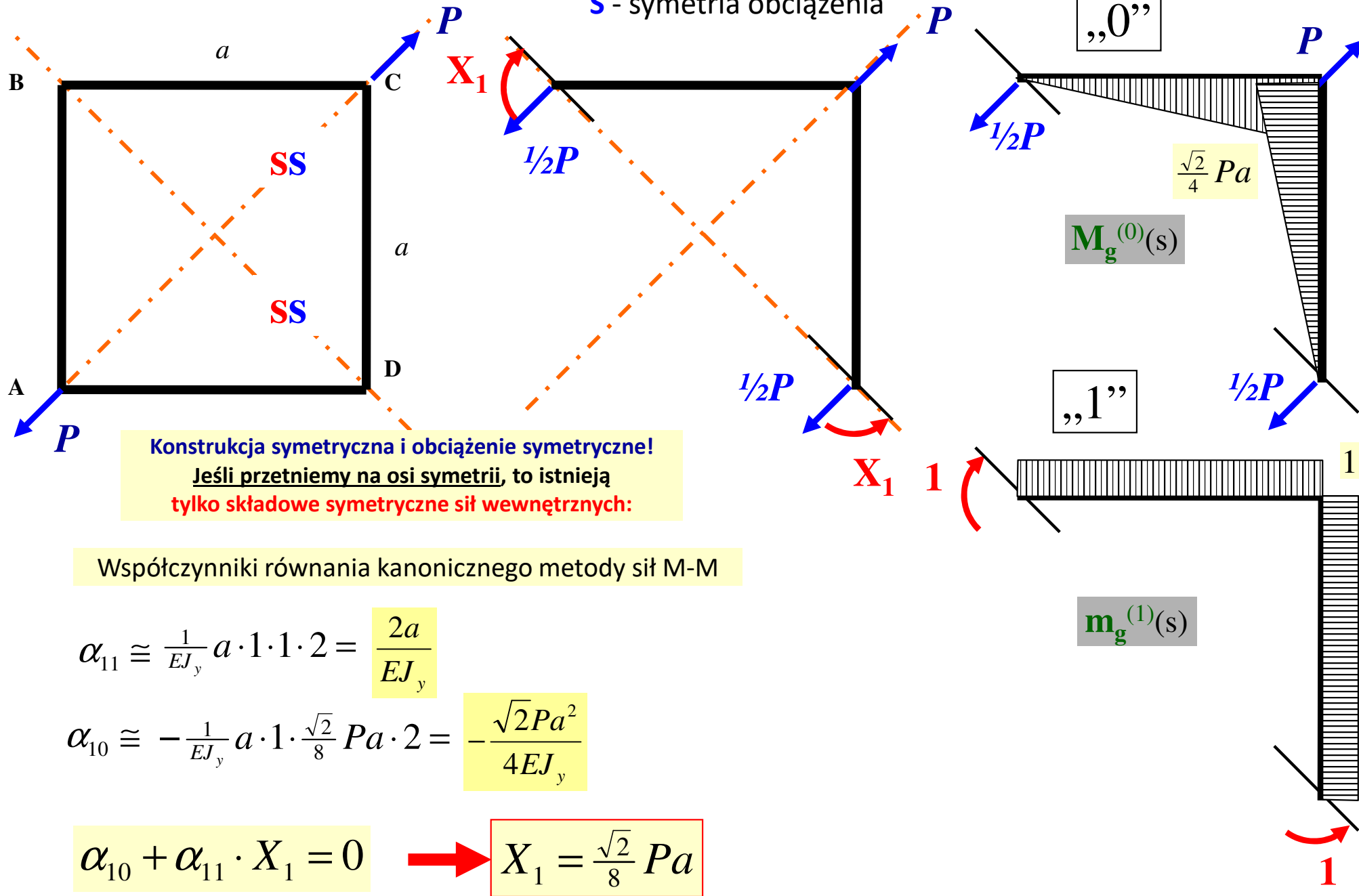
Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

Uproszczenia wynikające z zasady
jednoznaczności rozwiązania
(„*chwyty*”)

Przykład.1. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane: P, a, EJ_y

S - symetria konstrukcji
S - symetria obciążenia



Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!
Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko składowe symetryczne sił wewnętrznych:

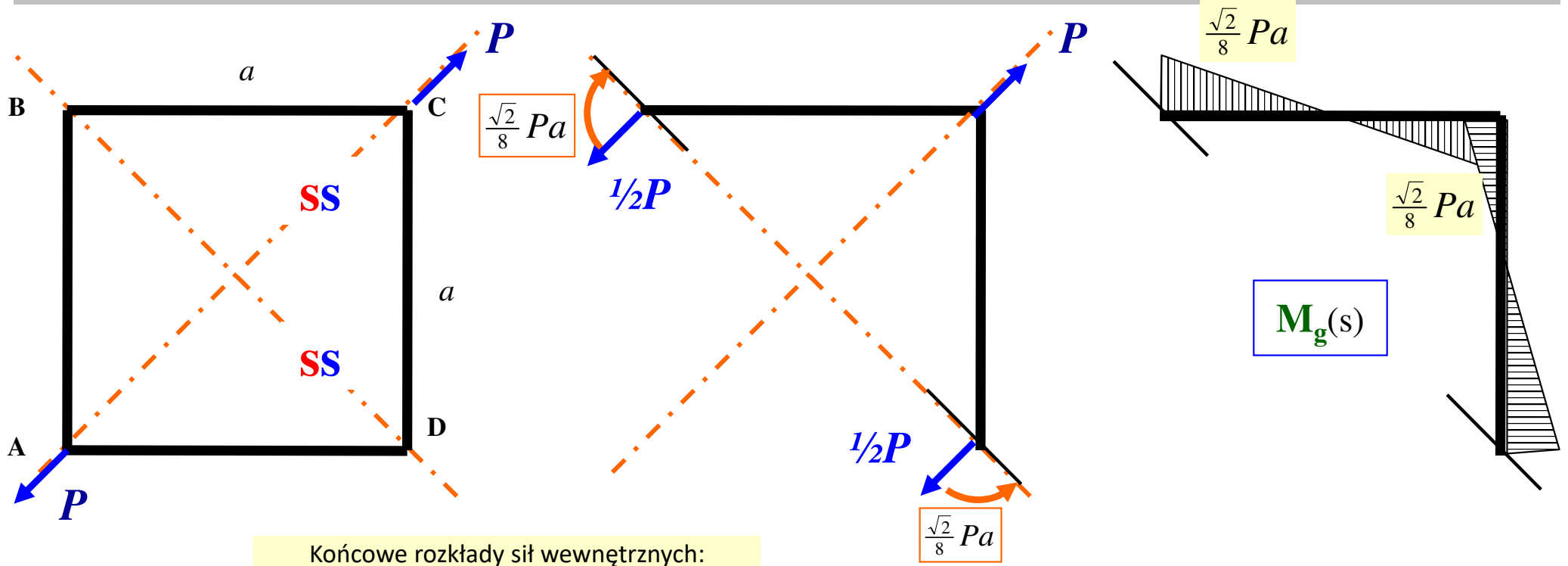
Współczynniki równania kanonicznego metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y} a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2a}{EJ_y}$$

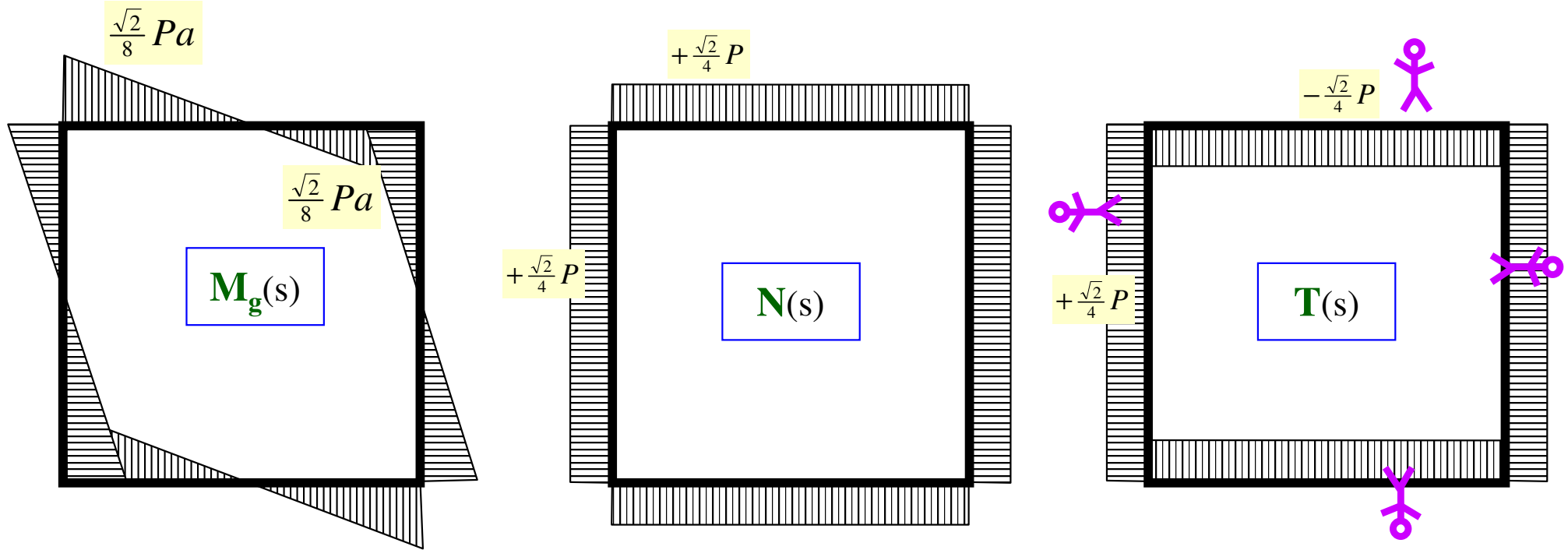
$$\alpha_{10} \cong -\frac{1}{EJ_y} a \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} Pa \cdot 2 = -\frac{\sqrt{2}Pa^2}{4EJ_y}$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} Pa$$

Przykład.1a. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

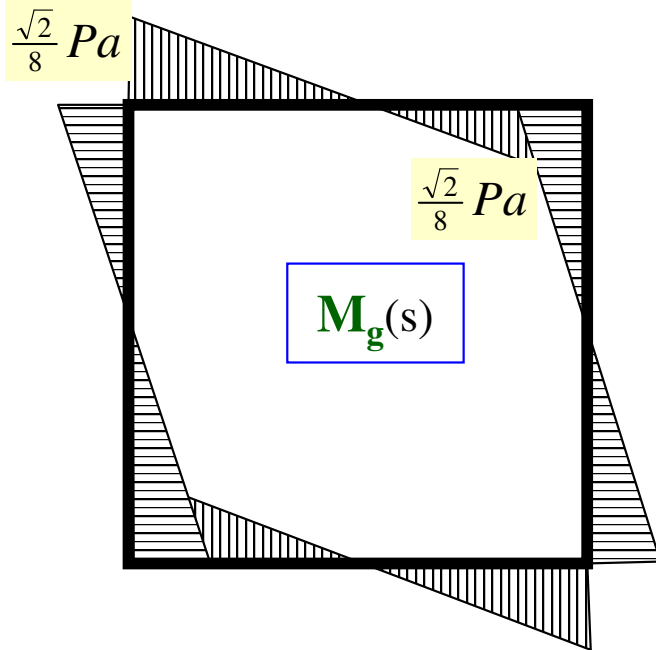


Końcowe rozkłady sił wewnętrznych:

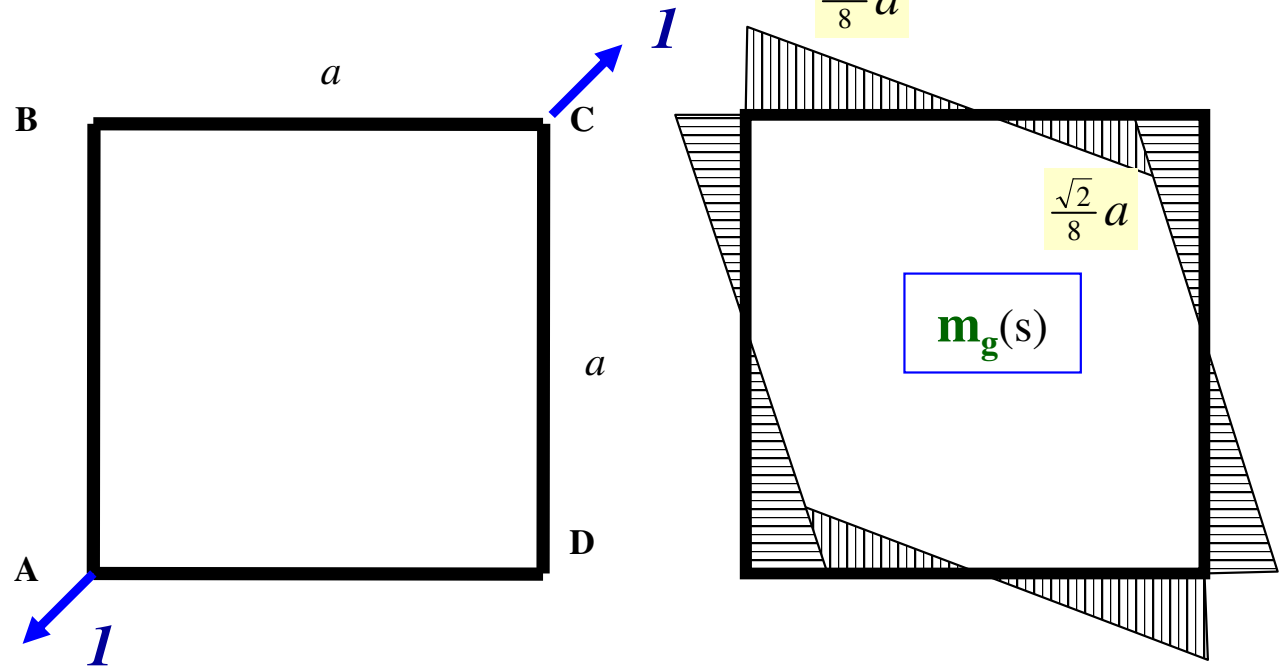


Przykład.1b. Wyznaczyć względne przemieszczenie punktów A i C

Stan przygotowany



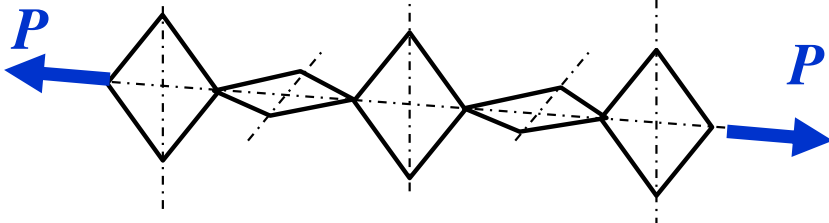
Stan jednostkowy



$$\Delta u_{AC} \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{8} Pa \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{8} a \cdot 8 \right) = \frac{Pa^3}{24EJ_y}$$

Zadanie typu
egzaminacyjnego:

Znaleźć wydłużenie łańcucha złożonego z 5
ogniw (każde o kształcie prostokątnej ramki)

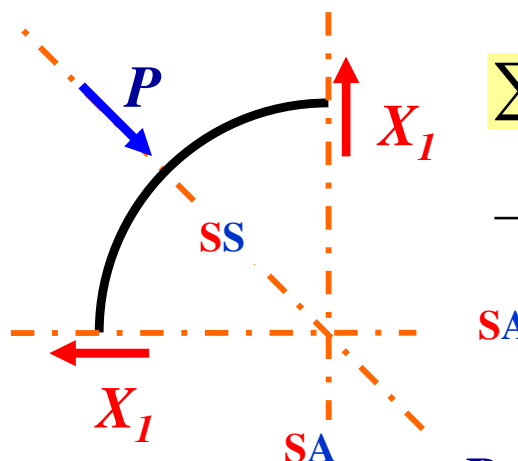
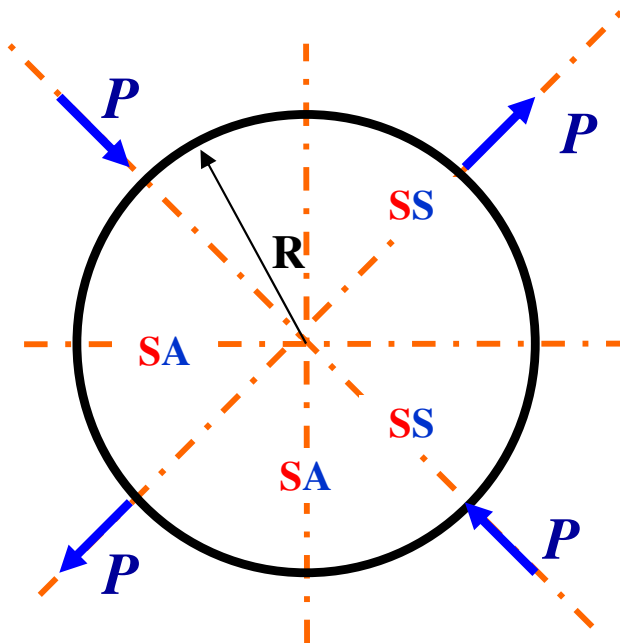


Przykład.2. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane: P, R, EJ_y

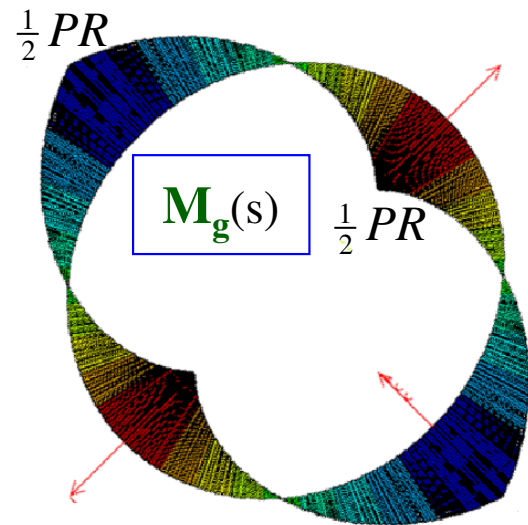
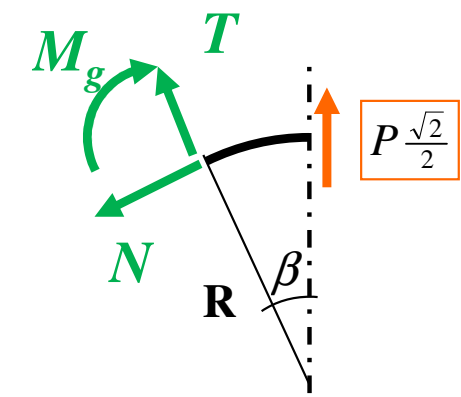
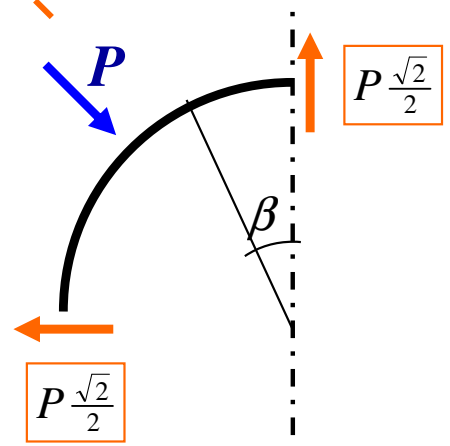
S - symetria konstrukcji
 S - symetria obciążenia
 A - antysymetria obciążenia

Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!
 Jeśli przetniemy na osi antysymetrii, to istnieją
 tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:



$$\sum F_z = 0:$$

$$-P \frac{\sqrt{2}}{2} + X_1 = 0 \rightarrow X_1 = P \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Końcowy rozkład momentu gnącego

Dla $0 \leq \beta \leq 1/4\pi$

$$M_g = P \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin \beta$$

$$T = -P \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta$$

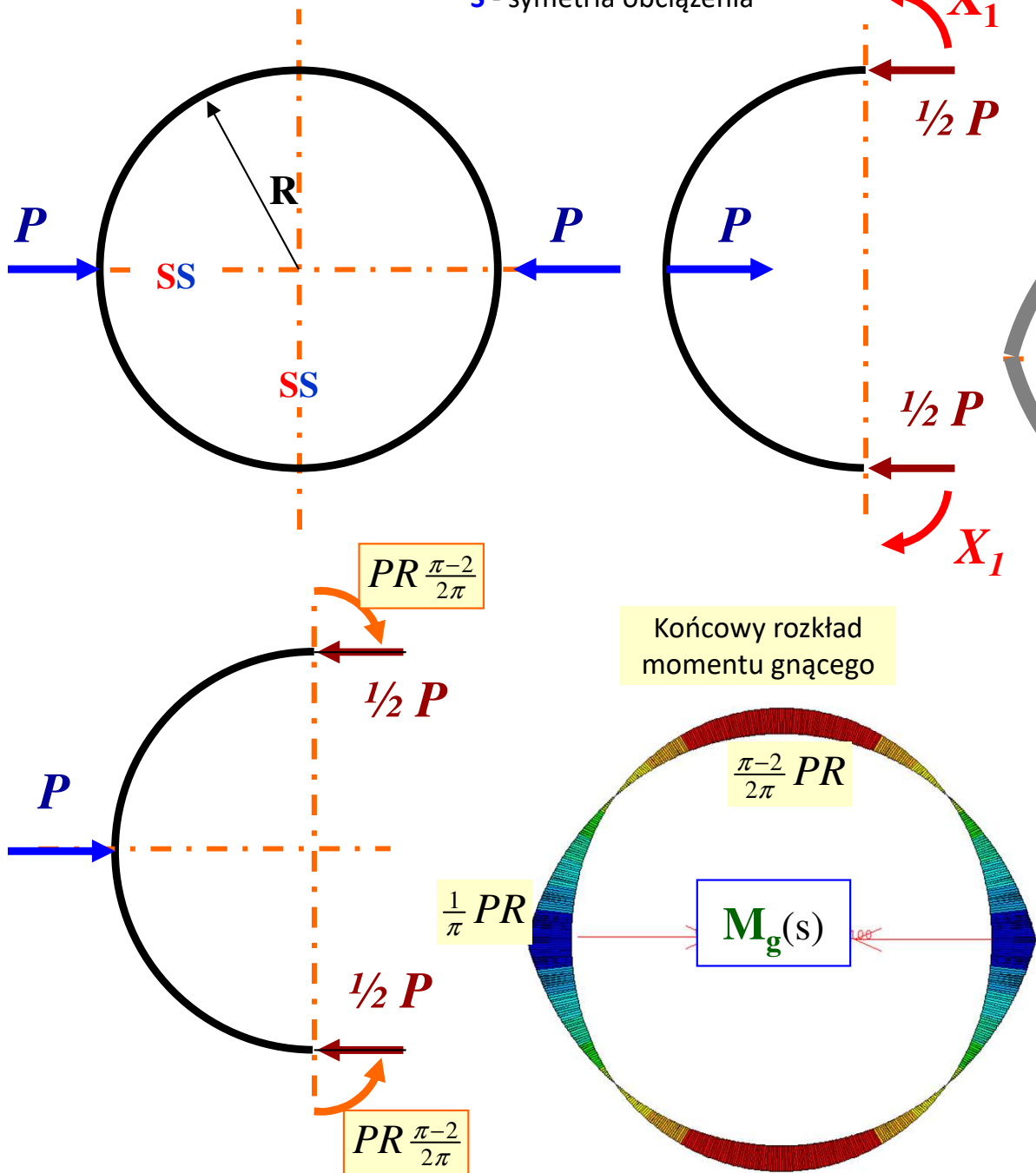
$$N = P \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta$$

Przykład.3. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane: P, R, EJ_y

S - symetria konstrukcji

s - symetria obciążenia



Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!

Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko składowe symetryczne sił wewnętrznych:

„0”

„1”

dla $0 \leq \beta \leq 1/2\pi$

$$M_g^{(0)} = \frac{1}{2} PR(1 - \cos \beta)$$

$$m_g^{(1)} = 1$$

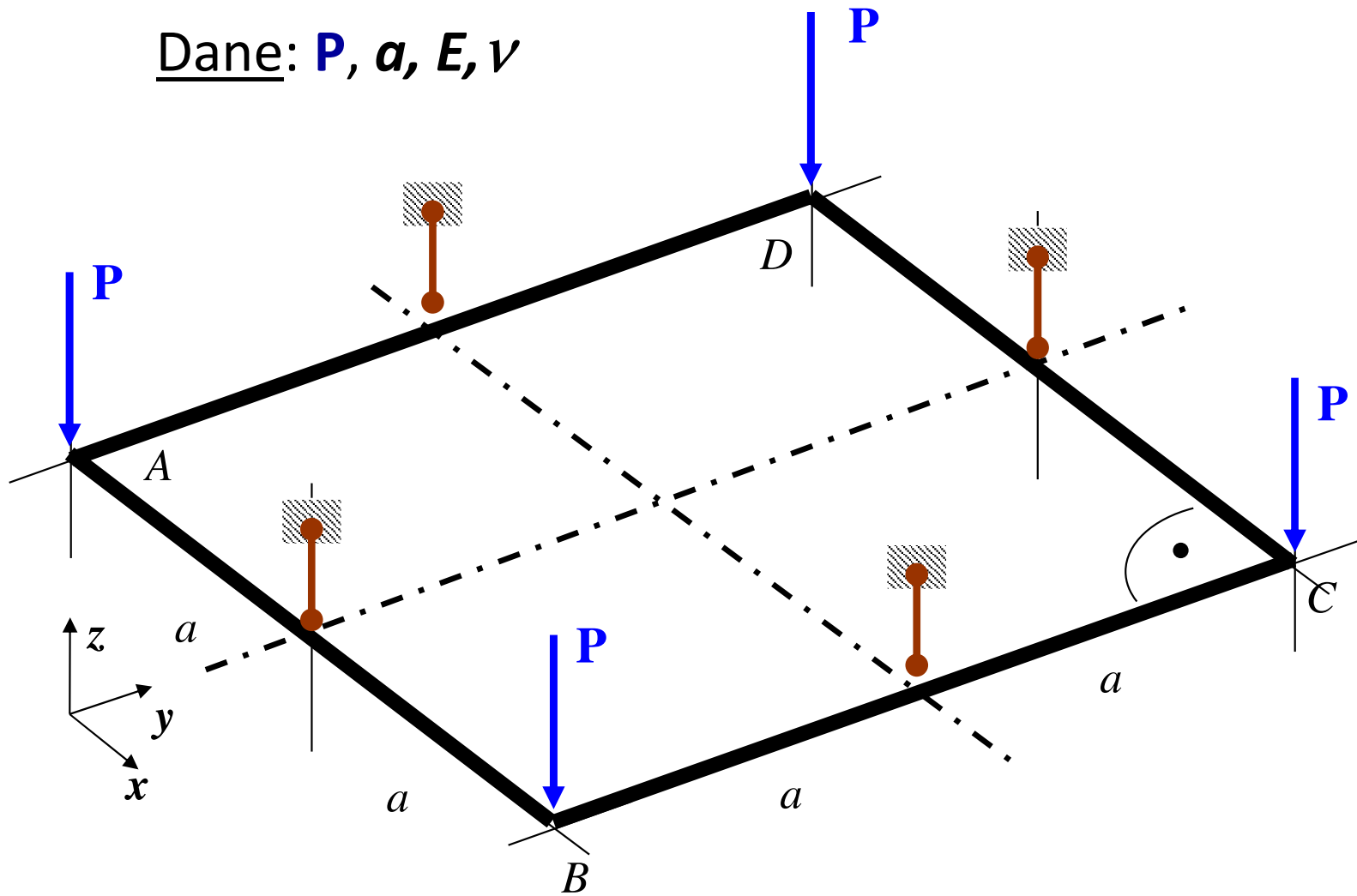
$$\alpha_{10} = 2 \cdot \frac{PR^2}{2EJ} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \beta) d\beta = \frac{PR^2}{2EJ} (\pi - 2)$$

$$\alpha_{11} = \frac{\pi R}{EJ}$$

$$X_1 = -PR \frac{\pi - 2}{2\pi}$$

Przykład.4. Rozwiązać ramę płaską statycznie niewyznaczalną obciążoną niepłasko

Dane: P, a, E, ν

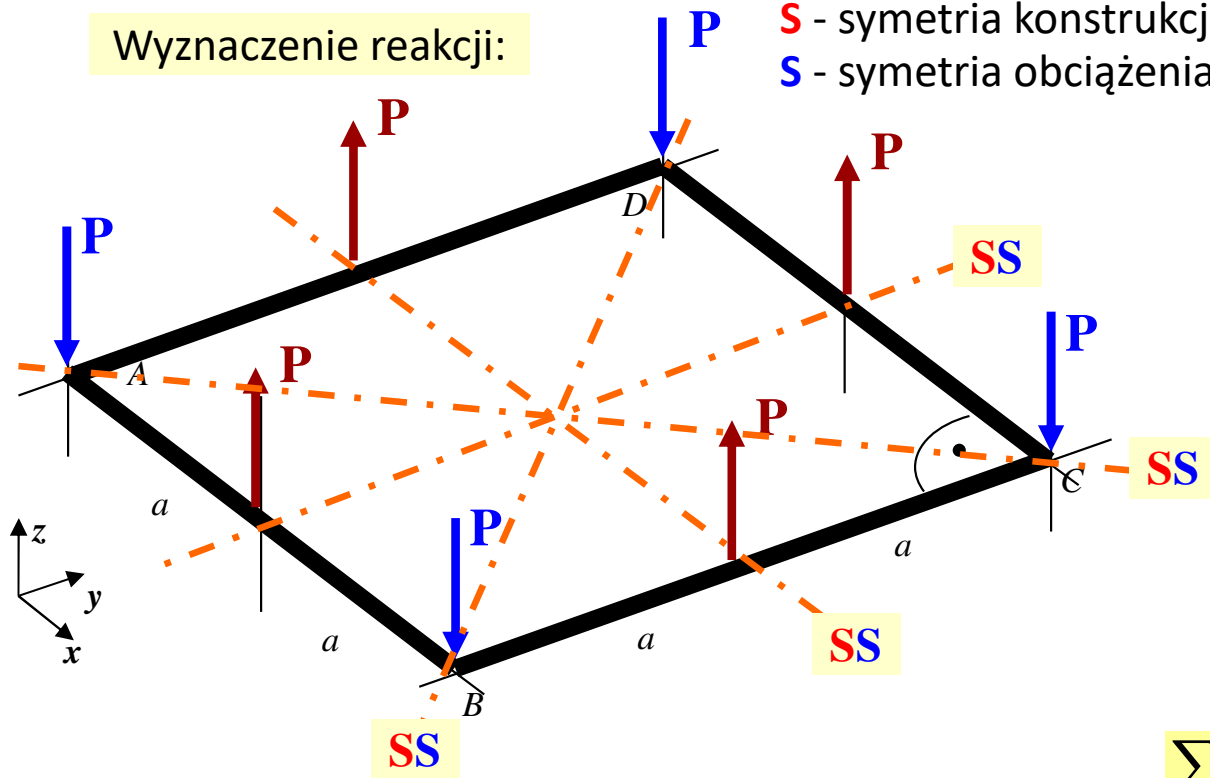


Przykład.4a. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążoną niepłasko

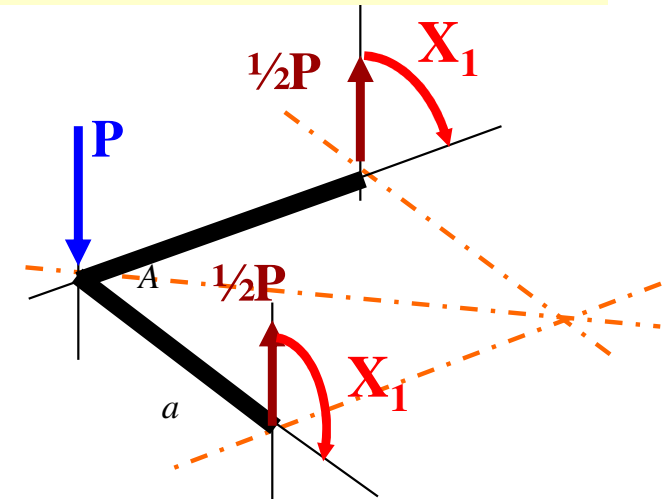
Wyznaczenie reakcji:

S - symetria konstrukcji
S - symetria obciążenia

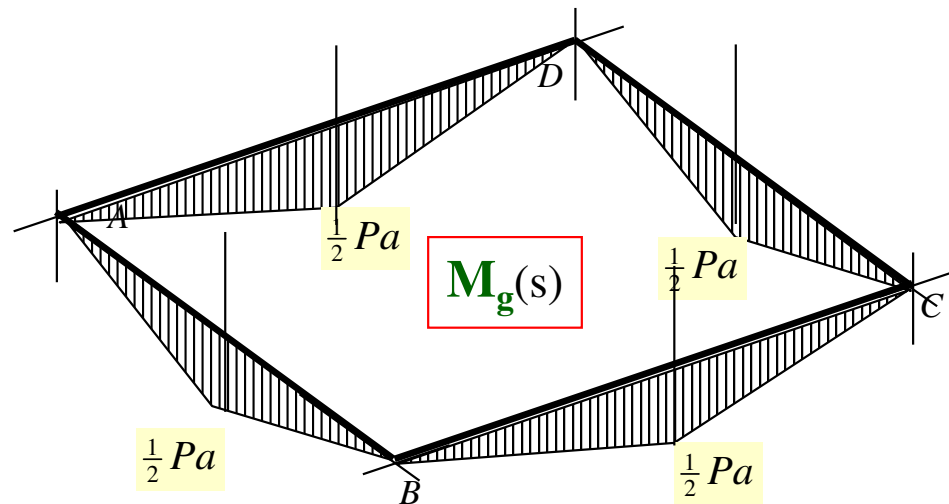
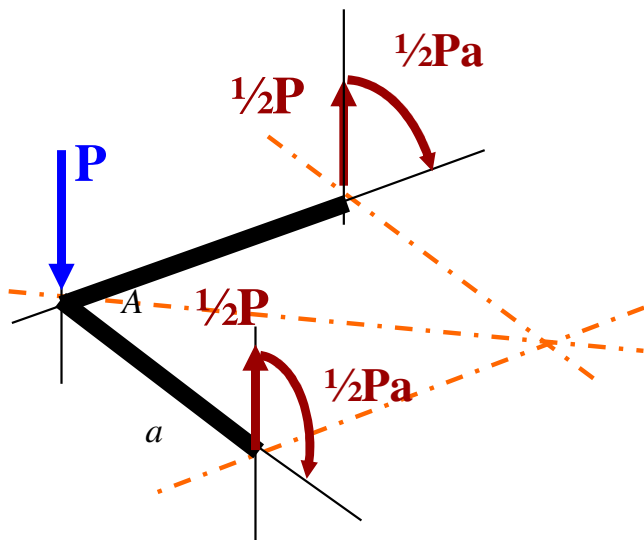
Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!
 Jeśli przetniemy w płaszczyźnie symetrii, to istnieją tylko składowe symetryczne sił wewnętrznych:



„Chytre” myślowe przecięcie:



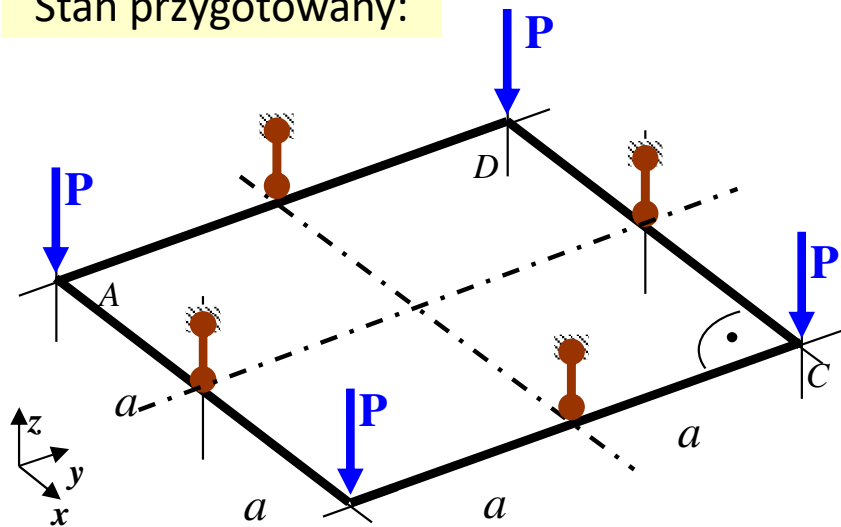
$$\sum M_{AD} = 0: -\frac{1}{2}Pa + X_1 = 0 \rightarrow X_1 = \frac{1}{2}Pa$$



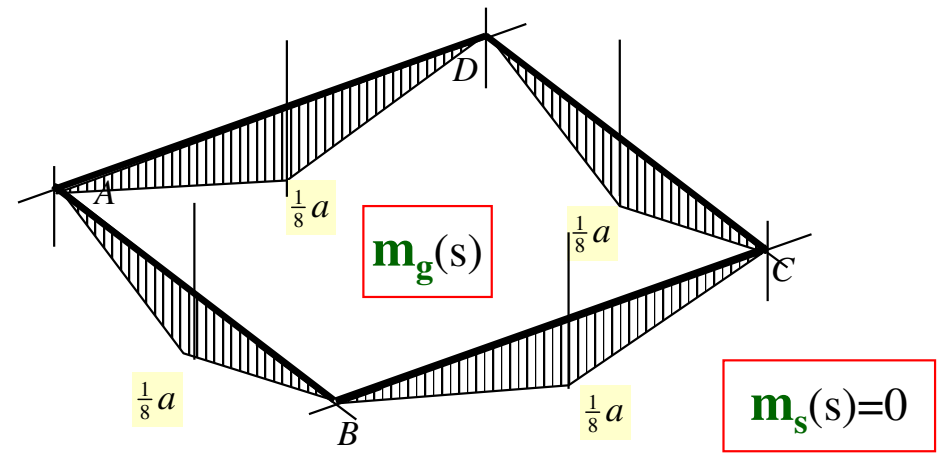
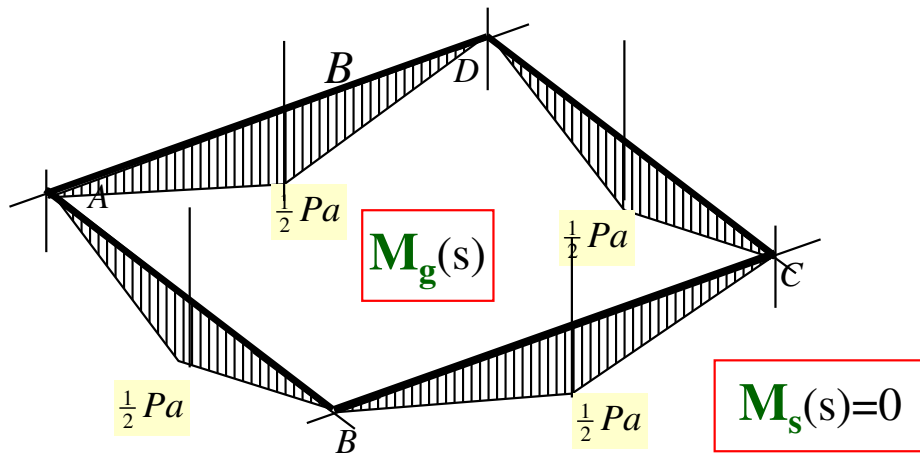
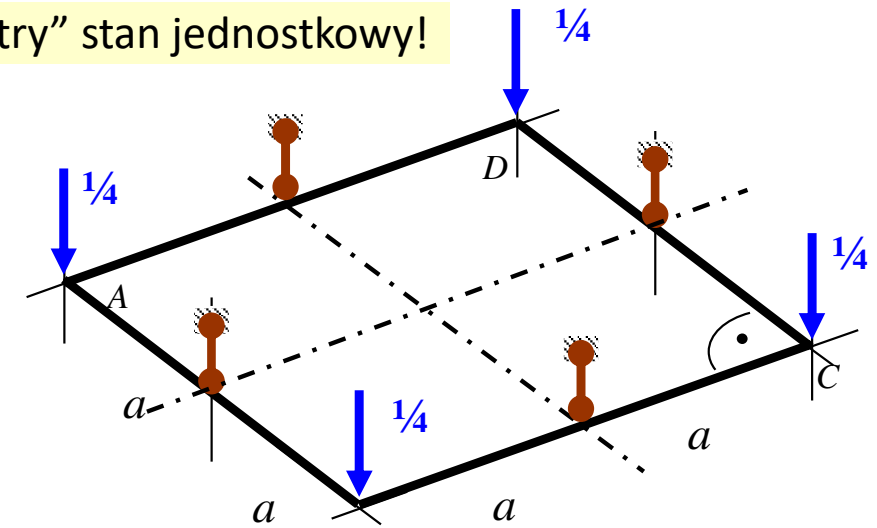
$$M_s(s) = 0$$

Przykład.4b. Wyznaczyć przemieszczenie pionowe punktu C $w_C = ?$

Stan przygotowany:



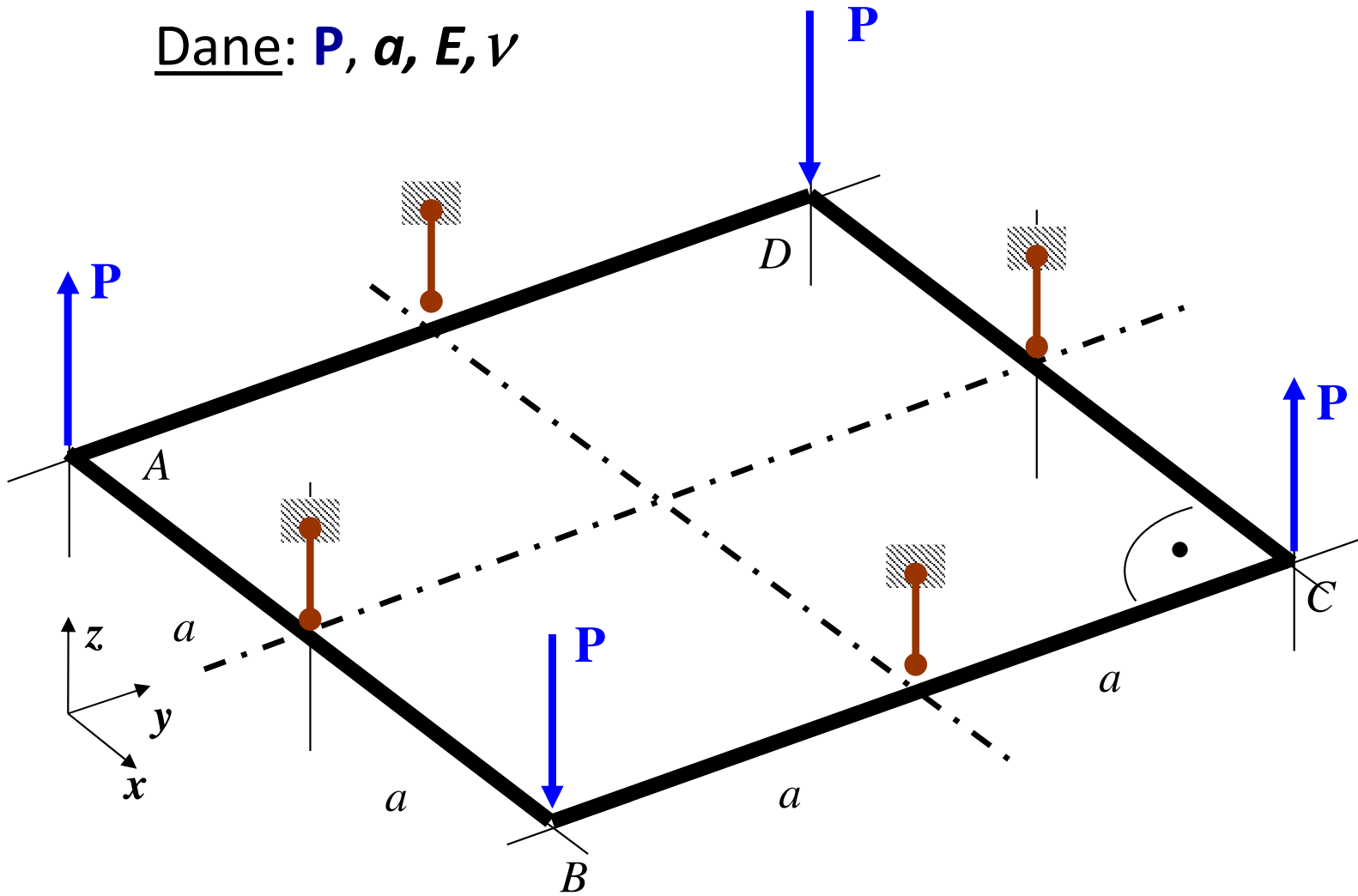
„Chytry” stan jednostkowy!



$$w_C \cong \sum_1^8 \left(\int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} ds \right) = \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{1}{4} Pa^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{8} a \right] \cdot 8 + \frac{1}{GJ_s} \cdot 0 = \frac{Pa^3}{6EJ_y}$$

Przykład.5. Rozwiązać ramę płaską statycznie niewyznaczalną obciążoną niepłasko

Dane: P, a, E, ν

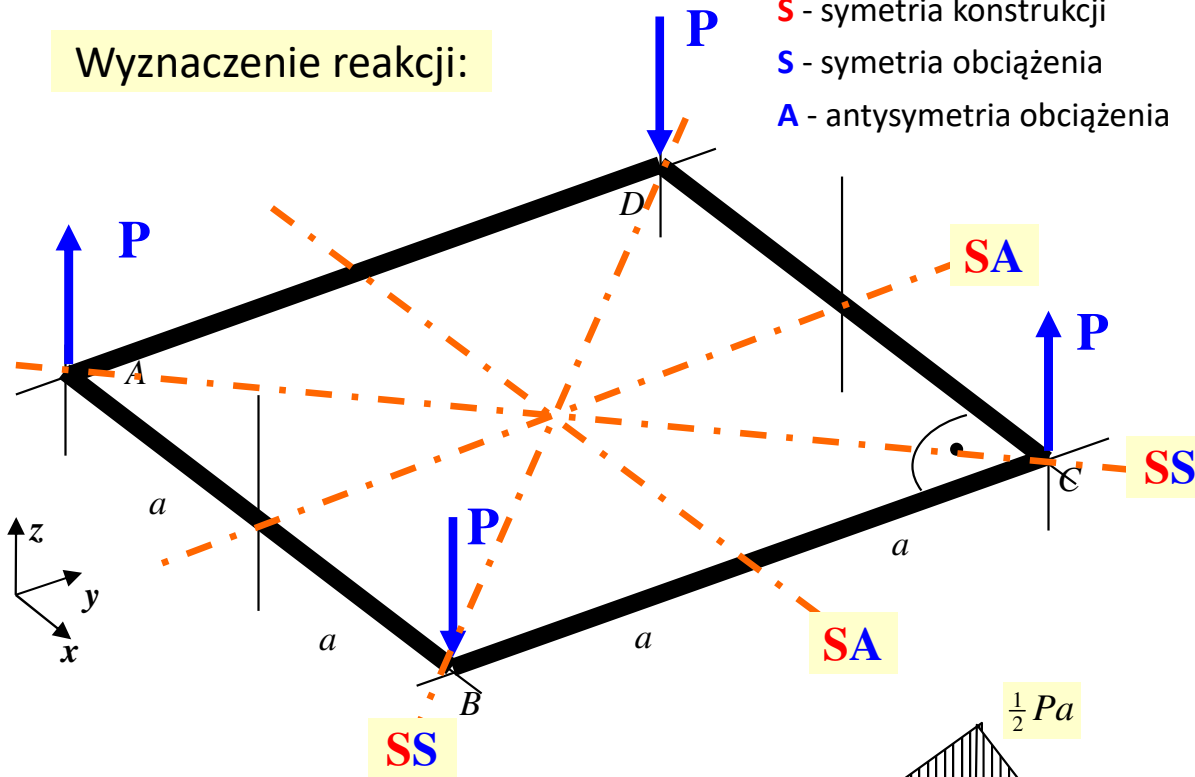


Przykład.5a. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążoną niepłasko

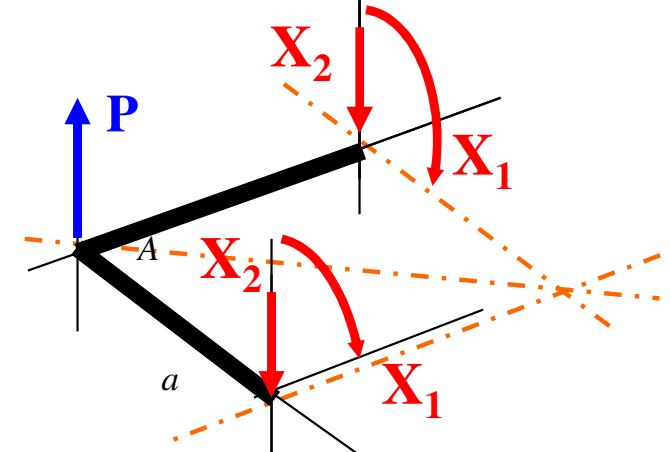
Wyznaczenie reakcji:

- S - symetria konstrukcji
- S - symetria obciążenia
- A - antysymetria obciążenia

Konstrukcja symetryczna z obciążeniem antysymetrycznym!
 Jeśli przetniemy w płaszczyźnie antysymetrii, to istnieją **tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:**

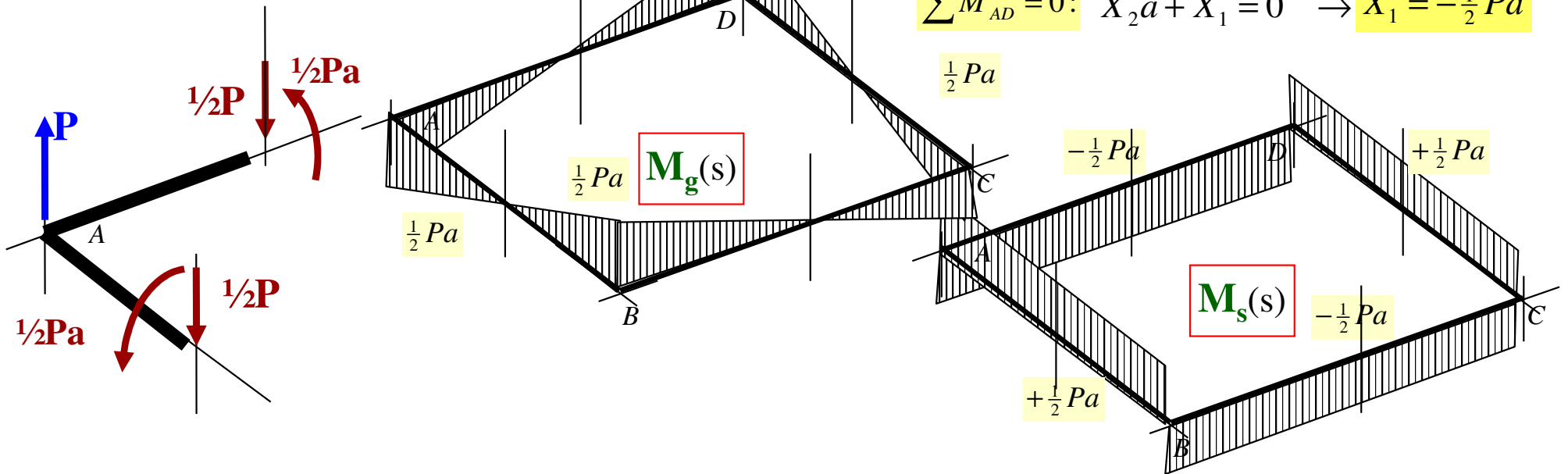


„Chytre” myślowe przecięcie:



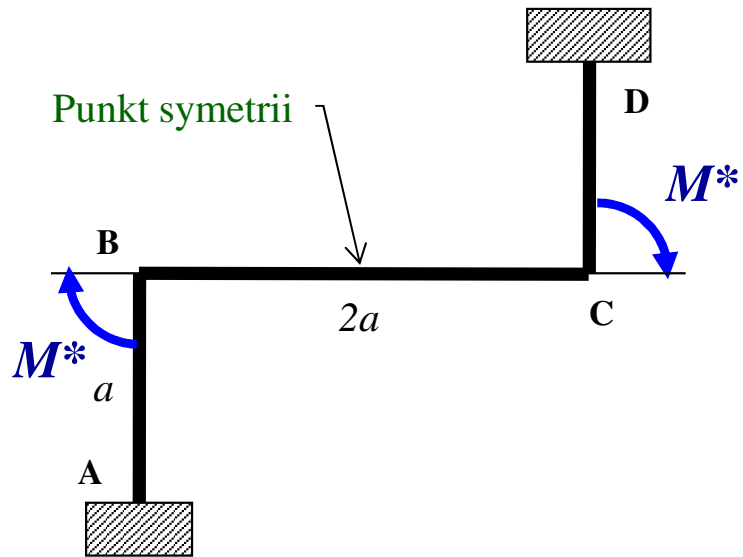
$$\sum F_z = 0: P - 2X_2 = 0 \rightarrow X_2 = \frac{1}{2}P$$

$$\sum M_{AD} = 0: X_2 a + X_1 = 0 \rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}Pa$$

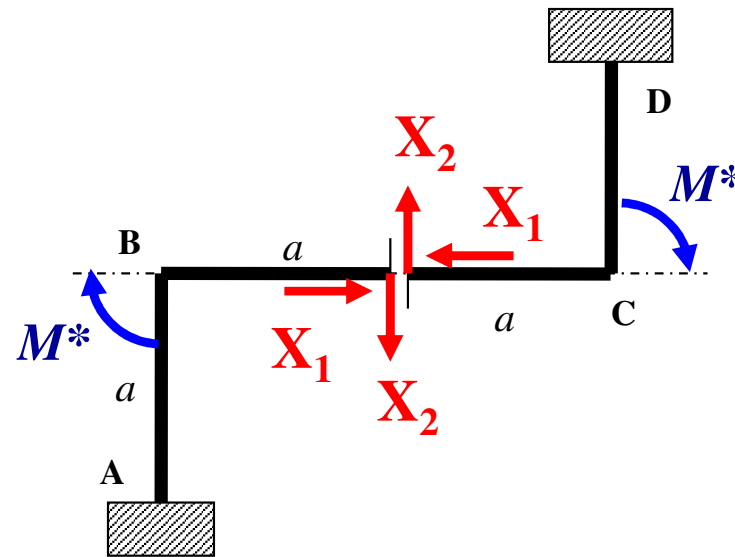


Przykład.6. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane: M^* , a , EJ_y

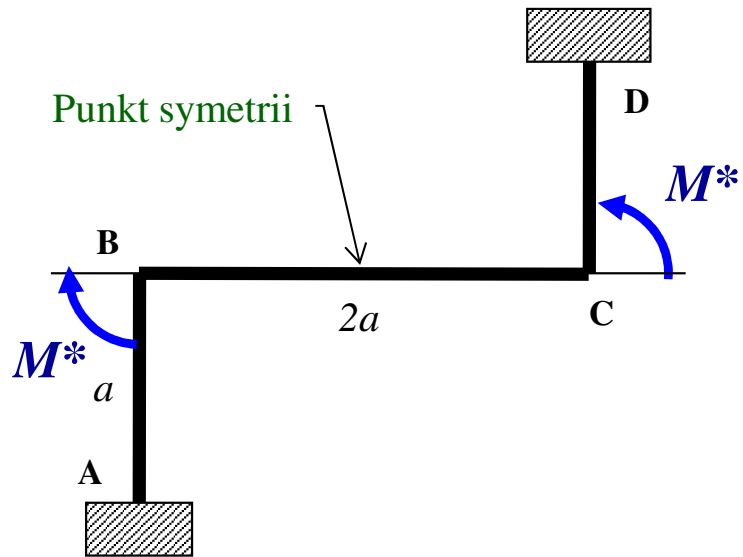


**Konstrukcja punktowo symetryczna
i obciążenie punktowo symetryczne!**
**Jeśli przetniemy w punkcie symetrii, to istnieją
tylko składowe punktowo symetryczne sił wewnętrznych:**

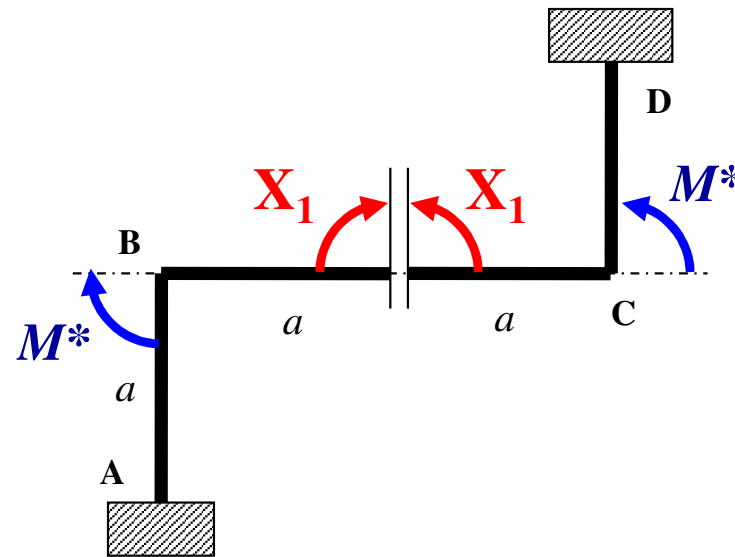


Przykład.7. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

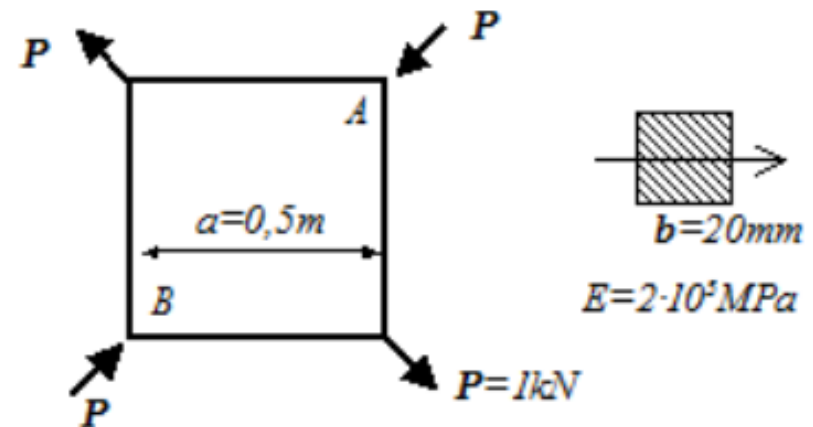
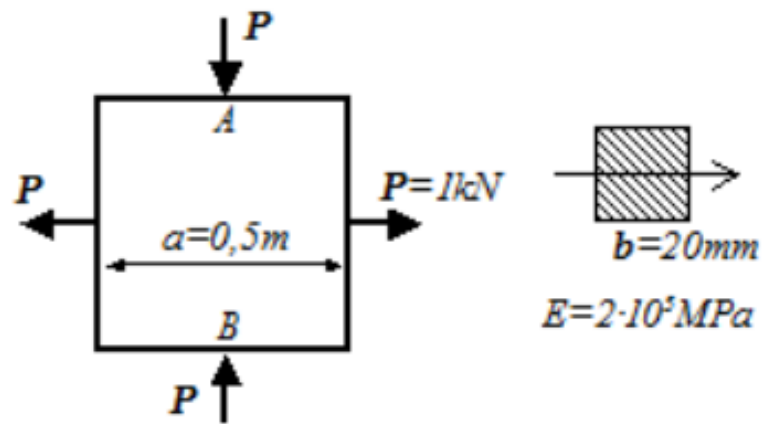
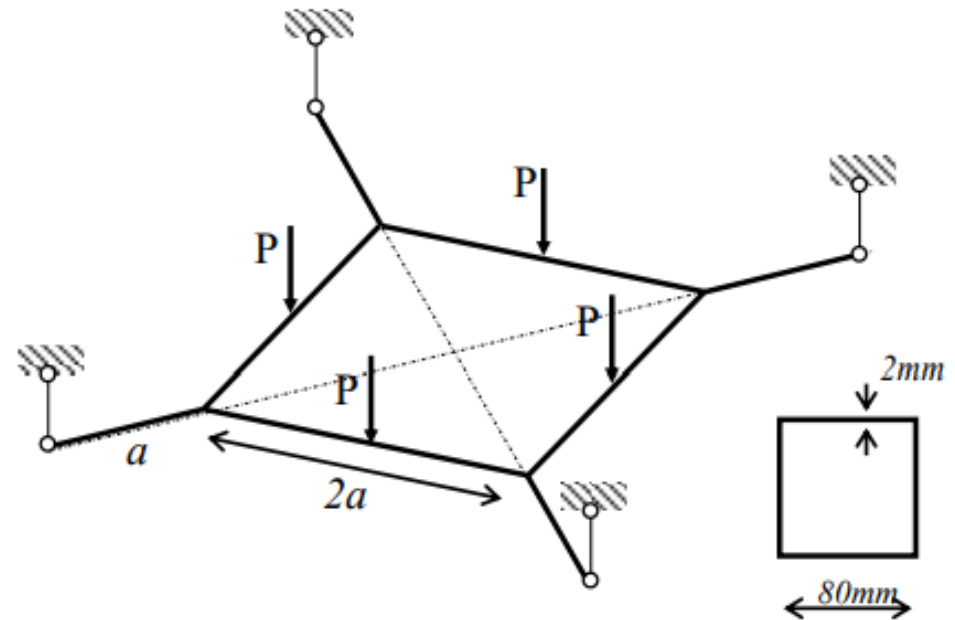
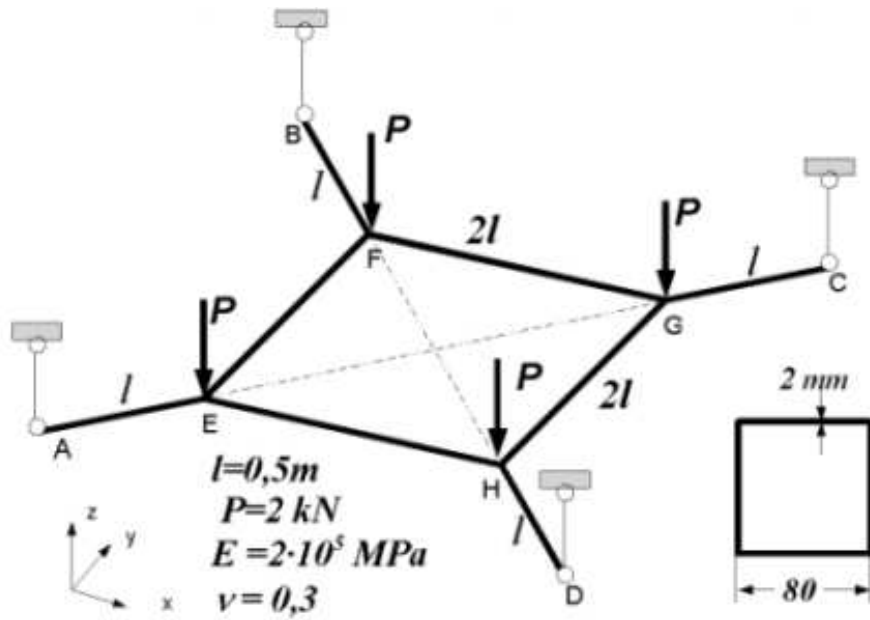
Dane: M^* , a , EJ_y



**Konstrukcja punktowo symetryczna
a obciążenie punktowo antysymetryczne!
Jeśli przetniemy w punkcie symetrii, to istnieją
tylko składowe punktowo antysymetryczne
siły wewnętrznych:**



Przykłady zadań z egzaminów



Przykłady zadań z egzaminów

